Funkcje liniowe

i wieloliniowe

w praktyce szkolnej

Opracowanie :

mgr inż. Renata Rzepińska

1. Wprowadzenie pojęcia funkcji liniowej w nauczaniu matematyki w gimnazjum.

W programie nauczania matematyki w gimnazjum znajduje się pojęcie funkcji liniowej. Funkcja liniowa, aczkolwiek elementarna, wcale nie jest taka prosta dla uczniów gimnazjum – wprost przeciwnie, jak uczy doświadczenie, mają oni z nią spore kłopoty. Przede wszystkim uważam, że nie można wprowadzać pojęcia funkcji liniowej, nie omawiając wcześniej pojęcia samej funkcji. Funkcje najlepiej przemawiające do ucznia, to funkcje ilustrujące zjawiska życia codziennego. Myślę, że właśnie od takich, „życiowych" funkcji trzeba zaczynać naukę o funkcjach, stopniowo matematyzując to pojęcie. Wystarczy, aby na początku dla ucznia funkcja była jednoznaczną zależnością między pewnymi obiektami (najczęściej liczbami) lub, inaczej, przyporządkowaniem jednych obiektów innym, przy czym przyporządkowanie to ma być jednoznaczne, o ile chcemy je nazwać funkcją. Pojęcie funkcji najlepiej kształtować na przykładach. Rozważamy więc różne przyporządkowania w rodzaju:

- każdemu uczniowi naszej klasy – krzesło, na którym siedzi czy też numer w dzienniku,
- każdemu człowiekowi z danej grupy – jego rok urodzenia,
- każdemu dziecku – jego ojca,
- każdemu ojcu – jego dziecko,
- każdej liczbie jej kwadrat,
- każdej parze liczb jej sumę lub iloczyn, itp.

Zastanówmy się wraz z uczniami, które z nich są jednoznaczne, a więc które są funkcjami w sensie matematycznym. Potem rozważamy głównie funkcje przyporządkowujące liczbom liczby, a więc funkcje, których wykres leży na płaszczyźnie. Wprowadzając definicję funkcji, uczniowie poznają również takie pojęcie jak: argument, wartość, dziedzina, zbiór wartości funkcji. Dalej potrzebna nam będzie umiejętność szkicowania wykresu funkcji na podstawie jej wzoru. W szkole mamy ograniczone możliwości badania funkcji. Nie możemy w szczególności posłużyć się metodami analizy matematycznej. Najczęściej używaną metodą jest tzw. metoda tabelkowa. Nadaje się ona do szkicowania wykresów dosyć regularnych funkcji, ale na szczęście tylko takie występują w programie gimnazjum. Sposób tabelkowy znajduje zastosowanie w programach komputerowych, gdzie szybko prowadzi do celu. Dobre zrozumienie przez uczniów samego pojęcia funkcji, sporządzania i odczytywania wykresów, pozwala nauczycielowi na wprowadzenie pojęcia funkcji liniowej.

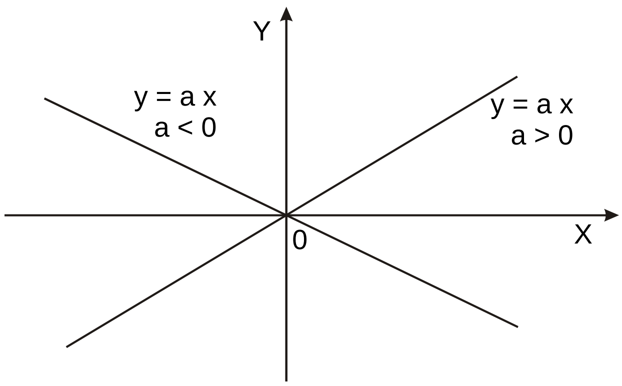
Omawiając to zagadnienie uczniowie zapoznają się z definicją funkcji liniowej.

1.1. Definicja funkcji liniowej.

Funkcję określoną wzorem **$y = ax + b$**, gdzie $a, b, x \in R$ nazywamy funkcją liniową.

Rozważamy najpierw funkcję postaci **$y = ax$**; $x \in R$.

Wykresem tej funkcji jest prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych i punkt (1, a) (rys. 1).



Rys. 1.

Liczba a nazywa się współczynnikiem kierunkowym (kątowym) tej prostej.

Zachodzi następujące twierdzenie:

Jeśli:

1) $a > 0$, to funkcja $y = ax$ jest rosnąca, prosta leży w ćwiartce I i III,
2) $a < 0$, to funkcja $y = ax$ jest malejąca, prosta leży w ćwiartce II i IV,
3) $a = 0$, to funkcja $y = ax$ jest stała, prosta pokrywa się z osią OX.

Następnie rozważamy funkcję postaci **y = ax + b**; $x \in R$, $b \neq 0$.

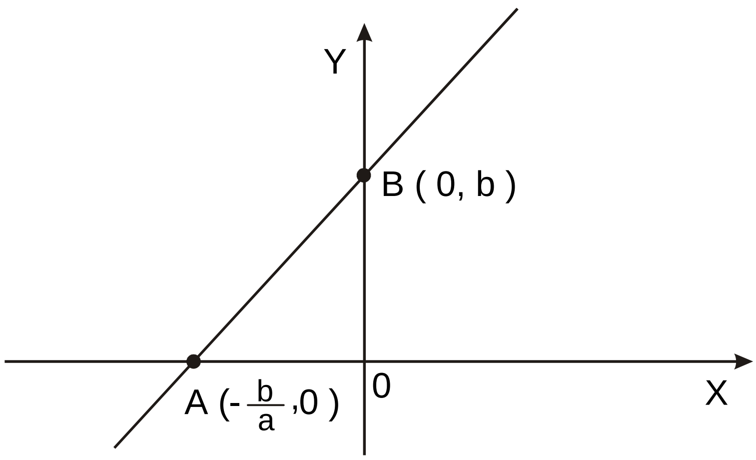
Wykresem tej funkcji jest prosta równoległa do wykresu funkcji y = ax, która przecina oś y w punkcie (0, b).

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.1.

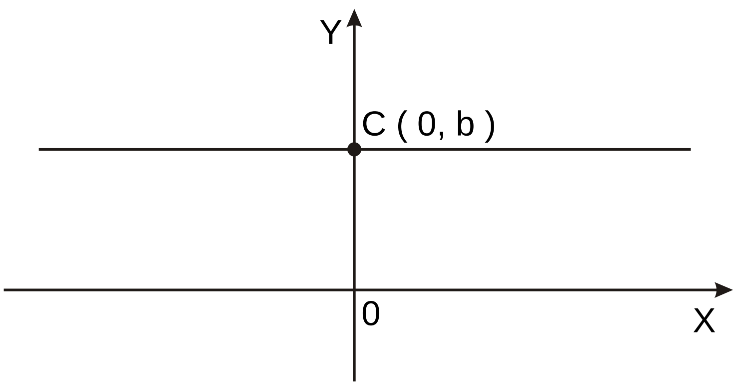
Jeśli:

1) $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to wykres funkcji y = ax + b przecina osie: – OX w punkcie A $(-\frac{b}{a}, 0)$, – OY w punkcie B(0, b) (rys. 2).



Rys. 2

2) a = 0 i $b \neq 0$, to funkcje y = ax + b ma postać y = b i wykres tej funkcji jest prostą równoległą do osi OX, która przecina oś OY w punkcie C(0, b) (rys. 3).



Rys. 3.

3) $a = 0$ i $b = 0$, to funkcja $y = ax + b$ ma postać $y = 0$ i wykres tej funkcji jest prostą pokrywającą się z osią OX.

Uwaga

Funkcja $y = ax + b$, przy $b \neq 0$, nazywa się liniowa w szkole (wykresem jest prosta), ale nie jest liniowa w sensie algebry liniowej, ponieważ nie jest ani addytywna ani jednorodna.

Definicja 1.2.

Miejscem zerowym funkcji $y = f(x)$ nazywamy liczbę x_1, dla której $f(x_1) = 0$.

Twierdzenie 1.2.

Funkcja $y = ax + b$:

- ma dokładnie jedno miejsce zerowe, $x = -\frac{b}{a}$, gdy $a \neq 0$,
- nie ma miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$,
- ma nieskończenie wiele miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b = 0$.

W celu dobrego zrozumienia pojęcia funkcji liniowej, uczniowie wykonują wiele zadań ćwiczeniowych.

2. Zastosowanie funkcji liniowej i wieloliniowej w gimnazjum i szkole średniej.

Pojęcie funkcji liniowej oraz jej własności uczniowie często wykorzystują w swojej dalszej edukacji.

Przykłady:

2.1. Rozwiązywanie układów równań metodą graficzną.

Z metodą tą uczniowie spotykają się już podczas nauki matematyki w gimnazjum.

Ilustrację graficzną każdego równania postaci $mx + ny = k$ (co najmniej jedna z liczb $m, n \neq 0$) jest linia prosta. Wynika stąd, że ilustrację graficzną układu równań

$$\begin{cases} m_1 x + n_1 y = k_1 \\ m_2 x + n_2 y = k_2 \end{cases}$$

jest para linii prostych. Rozwiązaniem układu jest para współrzędnych punktu wspólnego tych dwóch prostych.

a) rozwiążmy graficznie układ równań

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

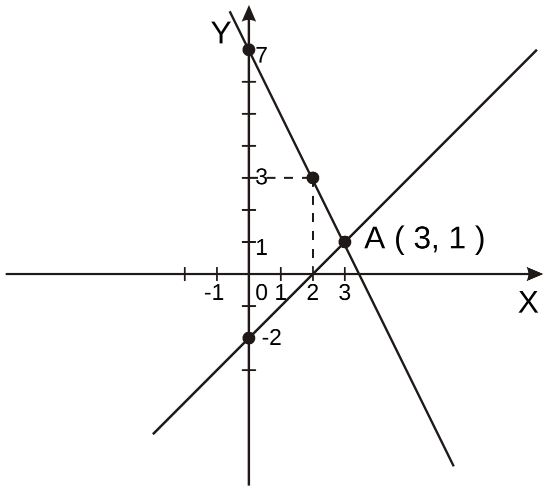
Ilustracją każdego z tych równań jest linia prosta. Aby ją narysować wystarczy wyznaczyć dwa punkty.

Równanie pierwsze

x	0	2
y	7	3

Równanie drugie

x	0	2
y	–2	0



Rys.4.

Proste przecinają się w punkcie $A = (3, 1)$. Oznacza to, że współrzędne tego punktu $x = 3$ i $y = 1$ są rozwiązaniem układu równań.

b) rozwiążmy graficznie układ równań

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$$

Narysujemy proste wyznaczone przez te równania.

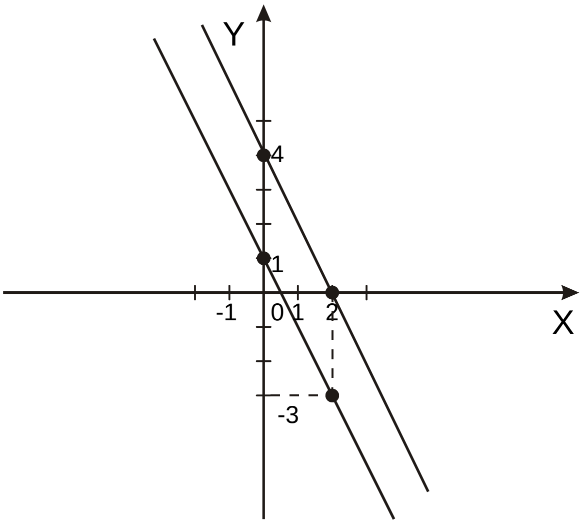
Jak poprzednio, każdą prostą wyznaczamy znajdując po dwa punkty leżące na niej.

Równanie pierwsze

x	0	2
y	1	–3

Równanie drugie

x	0	2
y	4	0



Rys. 5

Proste te są równoległe i nie mają punktów wspólnych. Oznacza to, że ten układ równań nie ma rozwiązania.

c) rozwiążmy graficznie układ równań

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -4x + 8y = 4 \end{cases}$$

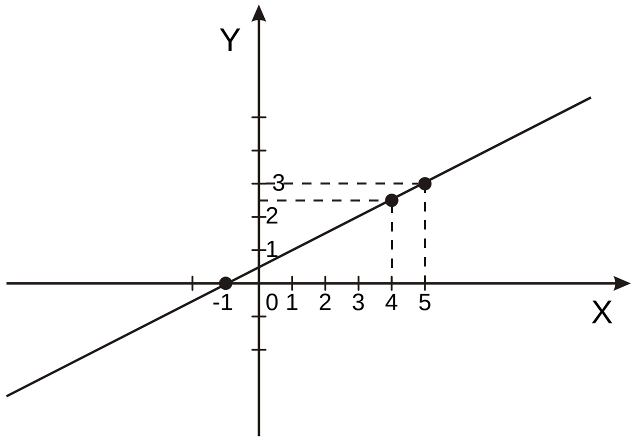
Podobnie, jak w poprzednich przykładach, narysujemy proste wyznaczone przez dane równania.

Równanie pierwsze

x	0	5
y	$\frac{1}{2}$	3

Równanie drugie

x	0	4
y	$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$



Rys. 6.

Oba równania wyznaczają tę samą prostą. Układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań. Każda para liczb będących współrzędnymi dowolnego punktu leżącego na tej prostej jest rozwiązaniem układu równań.

Powyższe przykłady ilustrują kolejno: układ równań mający jedno rozwiązanie, układ równań nie mający rozwiązania, układ mający nieskończenie wiele rozwiązań.

Definicja 2.1.

Układ równań liniowych mających dokładnie jedno rozwiązanie nazywamy *układem oznaczonym*.

Układ równań liniowych nie mający żadnego rozwiązania nazywamy *układem sprzecznym*.

2.2. Graficzne rozwiązywanie nierówności i układów nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

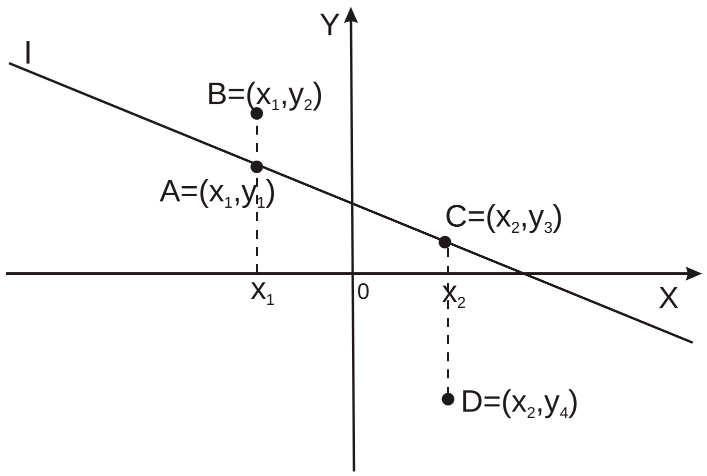
Nierówności: $-2x + 3y \geq 5$, $0 \cdot x - y \leq 6$, $x + y < 4$, $2x - y > 0$,

to przykłady nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Stwierdziliśmy poprzednio, że ilustracją graficzną równania liniowego dwóch zmiennych $mx + ny = k$ jest pewna prosta l . Współrzędne każdego punktu tej prostej spełniają to równanie, natomiast współrzędne żadnego punktu leżącego poza prostą nie spełniają tego równania.

Rozważmy teraz dowolną prostą nierównoległą do osi y.

Prosta taka ma równanie $y = ax + b$ (rys.7).



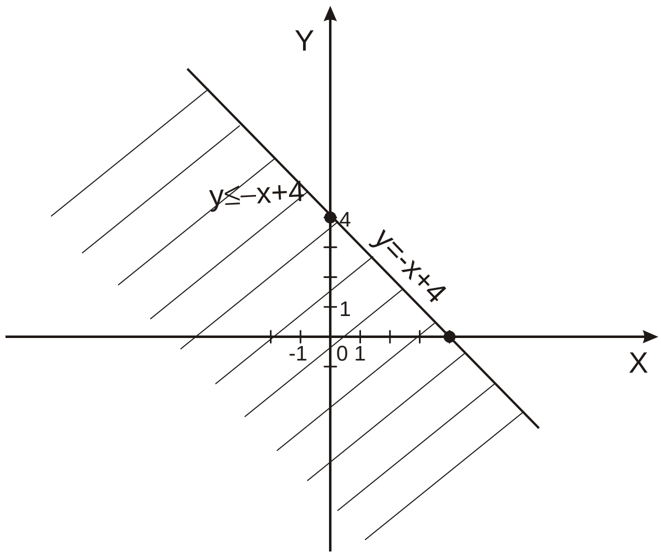
Rys. 7

Obierzmy na tej prostej dowolny punkt $A = (x_1, y_1)$. Punkt $B = (x_1, y_2)$ ma tę samą pierwszą współrzędną, natomiast jego druga współrzędna y_2 jest większa od drugiej współrzędnej punktu A. Ale $y_1 = ax_1 + b$, więc $y_2 > ax_1 + b$. Stwierdziliśmy więc, że współrzędne dowolnego punktu leżącego powyżej prostej $y = ax + b$, spełniają nierówność $y > ax + b$. Podobnie współrzędne punktu D leżącego poniżej prostej $y = ax + b$, spełniają nierówność $y < ax + b$. Prosta o równaniu $y = ax + b$ dzieli płaszczyznę na dwie części (półpłaszczyzny). Proste równoległe do osi x mają równanie postaci $y = b$. Punkty leżące powyżej tej prostej mają drugą współrzędną y, spełniającą warunek $y > b$; punkty zaś leżące poniżej tej prostej – współrzędną y spełniającą nierówność $y < b$. Proste równoległe do osi y mają równanie $x = c$. Współrzędne punktów leżących na prawo od tej prostej spełniają warunek $x > c$, zaś na lewo – warunek $x < c$.

Przykłady:

a) Zaznaczmy w układzie współrzędnych zbiór rozwiązań nierówności $y \leq -x + 4$.

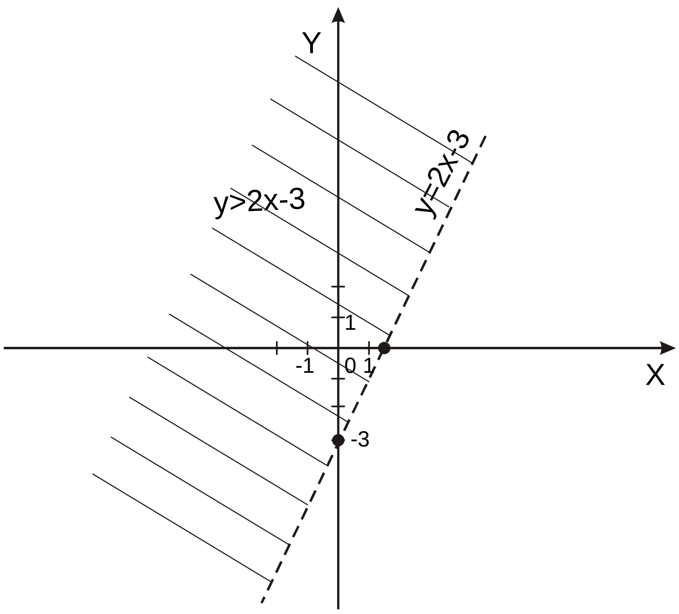
Sporządzamy wykres funkcji $y = -x + 4$. Współrzędne punktów leżących na tej prostej oraz poniżej tej prostej spełniają nierówność $y \leq -x + 4$ (rys. 8).



Rys. 8

b) Zaznaczmy w układzie współrzędnych zbiór rozwiązań nierówności $y > 2x - 3$.

Sporządzamy wykres funkcji $y = 2x - 3$. Współrzędne punktów leżących powyżej tej prostej, spełniają nierówność $y > 2x - 3$ (rys. 9).



Rys. 9

Zauważmy, że jeżeli nierówność jest ostra, to spełniają ją współrzędne wszystkich punktów półpłaszczyzny bez jej krawędzi. W przypadku, gdy nierówność jest nieostra, współrzędne punktów należących do krawędzi półpłaszczyzny również spełniają tę nierówność.

Możemy powiedzieć, że do zbioru rozwiązań każdej z tych nierówności należą uporządkowane pary liczb, które opisują współrzędne punktów wyznaczonej półpłaszczyzny.

Podobnie wyznaczamy zbiór rozwiązań układu dwóch nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi.

c) Zaznaczmy w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności

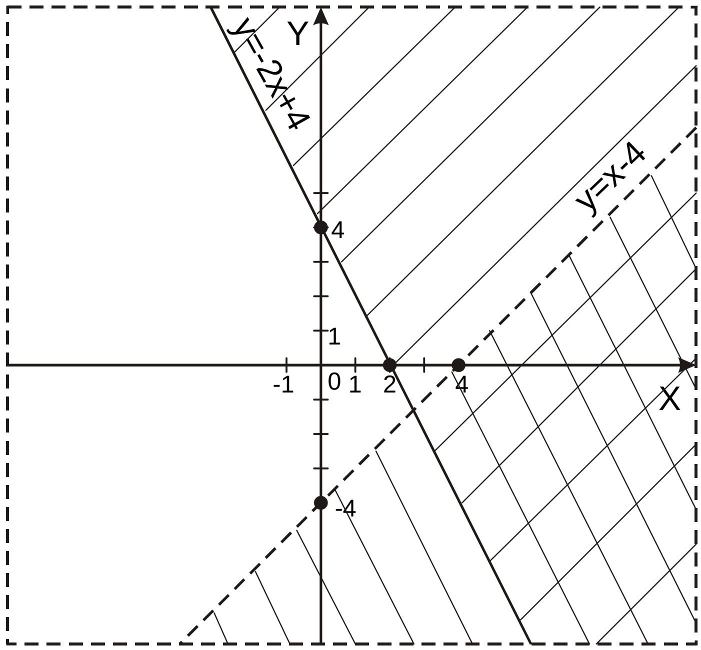
$$\begin{cases} 2x + y \geq 4 \\ x - y > 4 \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny kolejnym układom

$$\begin{cases} y \geq -2x + 4 \\ -y > -x + 4 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} y \geq -2x + 4 \\ y < x - 4 \end{cases}$$

Sporządzamy wykres funkcji y = – 2x + 4. Współrzędne punktów leżących na tej prostej oraz powyżej tej prostej, spełniają nierówność y ≥ –2x + 4. Następnie sporządzamy wykres funkcji y = x – 4. Współrzędne punktów leżących poniżej tej prostej, spełniają nierówność y < x – 4.

Zbiór punktów obszaru będącego częścią wspólną tych dwóch półpłaszczyzn, jest zbiorem rozwiązań układu nierówności (rys. 10).



Rys. 10

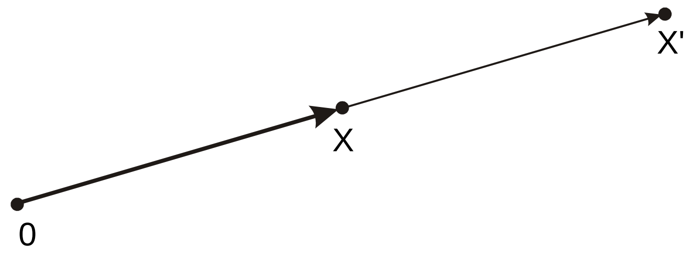
2.3. Jednokładność figur.

Kolejnym przykładem odwzorowania liniowego jest jednokładność.

Z pojęciem jednokładności uczniowie spotykają się na lekcjach matematyki w drugiej klasie gimnazjum, a następnie w szkole średniej.

Definicja 2.2.

Jednokładnością o środku O i skali $k \neq 0$ nazywamy przekształcenie przestrzeni, które każdemu punktowi X przestrzeni przyporządkowuje taki punkt X’, że $\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX}$ (rys. 11).



Rys. 11

Jednokładność zatem jest odwzorowaniem liniowym, ponieważ
$J_o^k(x) = kx$, jeśli x traktujemy jako wektor $\overrightarrow{OX}$.

Jeśli $x = (x_1, x_2)$, to $J_o^k(x_1, x_2) = (kx_1, kx_2)$.

W gimnazjum jednokładność definiuje się bez odwoływania się do rachunku wektorów. Punktowi O przyporządkowujemy ten sam punkt O, każdemu innemu punktowi X przyporządkowujemy punkt X’ określony następująco:

- jeśli $k > 0$, to punkt X’ leży na prostej OX po tej samej stronie punktu O, co punkt X, przy czym $\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$,
- jeśli $k < 0$, to punkt X’ leży na prostej OX po przeciwnej stronie punktu O niż X, przy czym $\overline{OX'} = |k| \cdot \overline{OX}$.

2.4. Rozwiązywanie układów równań za pomocą wyznaczników.

Wyznacznik k – tego stopnia jest funkcją k – liniową swoich kolumn (traktowanych jako wektory). Podczas fakultatywnych zajęć z matematyki uczniowie rozwiązują układy równań za pomocą wyznaczników.

Przykład:

Następujący układ równań rozwiążmy metodą wyznacznikową:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

współczynniki stojące przy niewiadomych x, y, z zapisujemy w postaci prostokątnej tablicy, zwanej macierzą układu.

Macierz układu oznaczamy przez A i zapisujemy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Następnie obliczamy wyznacznik macierzy układu

$$\det A = W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - (1 \cdot 0 \cdot 0 +$$

$$+ 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1) = 3 - 3 - 2 = -2 \neq 0.$$

Aby obliczyć niewiadomą x korzystamy z następującego wzoru:

$$x = \frac{W_x}{W}$$

W_x – jest wyznacznikiem macierzy otrzymanej z macierzy układu poprzez zastąpienie w niej kolumny współczynników stojących przy niewiadomej x kolumną wyrazów wolnych.

$$W_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 0 - (0 \cdot 0 \cdot 0 +$$

$$+ 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1) = -2 - 3 = -5$$

Po podstawieniu do wzoru otrzymujemy:

$$x = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} \quad .$$

Podobnie znajdujemy:

$$y = \frac{W_y}{W},$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - (1 \cdot 2 \cdot 0 +$$

$$+ 2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot 1) = 2 + 3 - 2 = 3 \ .$$

Czyli

$$y = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2} \ .$$

W ten sposób obliczamy niewiadomą z :

$$z = \frac{W_z}{W} ,$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - (1 \cdot 0 \cdot 1 +$$

$$+ 1 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0) = 2 + 2 - 2 = 2 \ .$$

Zatem

$$z = \frac{2}{-2} = -1 \ .$$

Rozwiązaniem naszego układu równań jest: $x = \frac{5}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$, $z = -1$.

Metodę tę wygodnie jest stosować w rozwiązywaniu układów równań liniowych, w których występują więcej niż dwie niewiadome. Jednak, aby można było skorzystać z metody wyznacznikowej, wyznacznik macierzy układu musi być różny od zera. Macierz taką nazywamy macierzą nieosobliwą, a układ równań układem Cramera.

Powyższe przykłady świadczą o tym, że w praktyce szkolnej największe zastosowanie ma funkcja liniowa, znacznie mniejsze natomiast funkcja wieloliniowa.